مناسب روزهای منتهی به امتحان

کنکورسلام

مدرسه علاقه‌مندان فرهنگیان

جزوه مرور سریع

دوازدهم

اختصاصی

هک نهایی



ریاضی

- آموزش فشرده کتاب درسی
- نکات مهم و پرتکرار امتحان نهایی
- سوالات منتخب ادوار امتحان نهایی + پاسخ تشریحی
- جداول جمع‌بندی و مرور سریع مطالب

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عوامل جزوه مرور سریع
هک امتحان نهایی



محمد انصاری

طراح راهبرد آموزشی و ناظر علمی

دانش‌آموخته دانشگاه فرهنگیان



عرفان محسن‌زاده

استراتژیست و مشاور راهبردی

دانشجوی پزشکی دانشگاه جهرم



فاطمه کیانفر

مدیر عملیاتی و راهبردی

دانشجو-معلم دانشگاه فرهنگیان



ابوالفضل شجاعی

طراح رابط کاربری و مسئول گرافیک

دانشجوی حقوق دانشگاه تبریز



علی قاسمی

ناظر علمی و اجرایی

دانشجو-معلم دانشگاه فرهنگیان



درسا قاسمی

مولف و ویراستار علمی

دانشجو-معلم دانشگاه فرهنگیان



محمدمهدی آموزگار

مولف و ویراستار علمی

دانشجو-معلم دانشگاه فرهنگیان



امیرمحمد لطیفی

مولف و ویراستار علمی

دانشجو-معلم دانشگاه فرهنگیان



قبولی ۱۴۰۵ فرهنگیان

تویی که داری این جزوه رو می‌خونی

معلّم آینده ایران

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ویژگی‌های جزوه مرور سریع

هک امتحان نهایی

کد هک

این بخش، قلب هر فصل و نقطه شروع فرآیند «هک» است. در کُدِ هَک، درسنامه بصورت فشرده نوشته شده است و مفاهیم مهم کتاب درسی را با زبان ساده، روان و مستقیم آموزش می‌دهد، بدون آنکه شما را در توضیحات اضافی و حاشیه‌ای غرق کنند. مطالب این بخش به‌طور بخش‌بندی‌شده و با عنوان مشخص ارائه می‌شوند تا ذهن شما بتواند ساختار هر درس را دقیق سازمان‌دهی کند. هدف از کُدِ هَک این است که با مطالعه همین قسمت، از مراجعه به منابع دیگر بی‌نیاز شوید و پایه مفهومی هر مبحث را محکم کنید.

ایستگاه نکته

این بخش دقیقا روی «نقاط حساس و سؤال‌خیز» هر مبحث دست می‌گذارد؛ جایی که طراحان امتحان نهایی بیشترین علاقه را به طرح سؤال دارند. در ایستگاه نکته، مهم‌ترین نکات پرتکرار، دام‌های امتحانی، روابط علّی و معلولی و نکات حفظی کلیدی با دقت و وسواس انتخاب شده‌اند تا بدانید هنگام مطالعه و مرور، باید روی کدام جمله‌ها و کدام بخش‌های کتاب بیشترین انرژی را بگذارید. این ایستگاه‌ها در دل درسنامه و در همان جایی قرار می‌گیرند که به آن مبحث مربوط است؛ بنابراین هنگام مطالعه، چشم‌تان به نکات طلایی می‌افتد و یادگیری‌تان به شکل هدفمند تقویت می‌شود.

دست گرمی

این بخش، پل ارتباطی بین «یادگیری مطالب» و «سوالات امتحان نهایی» است. در دست‌گرمی، برای هر مبحث، سؤالات استاندارد و شناسنامه‌دار از امتحانات نهایی سال‌های گذشته انتخاب شده است تا دقیقاً همان چیزی را تمرین کنید که ممکن است در جلسه‌ی امتحان با آن روبه‌رو شوید. پاسخ هر سؤال به‌صورت تشریحی، مرحله‌به‌مرحله و مطابق با «الگوی رسمی تصحیح امتحان نهایی» نوشته شده است و بارم هر قسمت پاسخ مشخص شده تا بدانید هر جمله‌ی شما چه‌قدر در نمره نهایی تأثیر دارد. هدف دست‌گرمی این است که قبل از دیدن برگه امتحان، روش حل استاندارد و نحوه نوشتن پاسخ کامل را تمرین کنید و اعتمادبه‌نفس خود را بالا ببرید.

کپسول ۲۰

این بخش، «فشرده هر مبحث» را در اختیار شما قرار می‌دهد؛ جایی که حجم زیادی از اطلاعات کتاب درسی در قالب جدول‌ها، نمودارها و دسته‌بندی‌های ساختاری خلاصه شده‌اند. کپسول ۲۰ به‌گونه‌ای طراحی شده که در کوتاه‌ترین زمان، بتوانید بیشترین حجم نکات را مرور کنید و تصویر کلی فصل و ارتباط بین مفاهیم را در یک نگاه ببینید. این بخش، مخصوص دقایق طلاییِ قبل از امتحان است؛ زمانی که باید بدون سردرگمی و از دست دادن تمرکز، مطالب هر فصل را یک‌جا و منظم در ذهن خود مرور کنید و مطمئن باشید هیچ نکته مهمی از قلم نیفتاده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فصل اول:

۱ تابع

کد هک

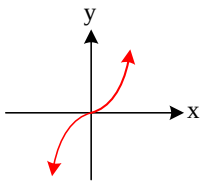
درس ۱: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

➤ توابع چندجمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به‌شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+c$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n نام دارد.

مثلاً تابع $f(x)=5x^4-8x+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۴ است.

تابع درجه ۳: تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجه ۳ است که نمودار آن به‌طور تقریبی مانند شکل روبه‌رو است:



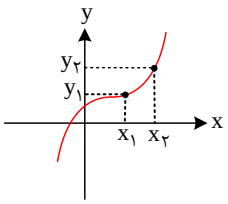
دامنه $\mathbb{R}$ و برد $\mathbb{R}$

ایستگاه نکته

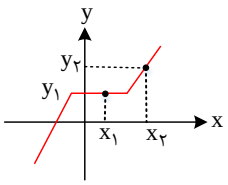
اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ‌تر از x^3 است، پس در بازه‌ی $(0,1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است، ولی در بقیه xهای مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.

توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

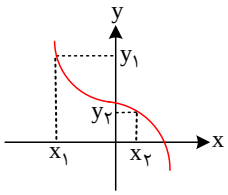
➤ در تابع f اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر y هم مرتب افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است. مانند تابع روبه‌رو: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$



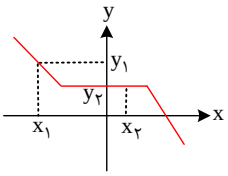
➤ حال اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است. مانند تابع روبه‌رو: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\geq y_1$



➤ در تابع f اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر y هم مرتب کاهش یابند، می‌گوییم f اکیداً نزولی است. مانند تابع روبه‌رو: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2<y_1$



➤ حالا اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر y کم شوند، ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشد، می‌گوییم تابع f نزولی است. مانند تابه روبه‌رو: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\leq y_1$



ایستگاه نکته

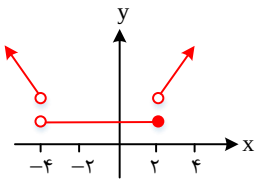
■ **تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y=k$ می‌باشد.** $(k\in\mathbb{R})$

Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
konkoorsalam
konkoorslm

■ ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنه‌ی خود، نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

دست گرمی

با توجه به نمودار تابع f، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون A، قسمت صحیح از ستون B را انتخاب کنید. (۰/۷۵) (امتحان نهایی ۱۴۰۴)



A	B
الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است. ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است. پ) تابع در این بازه ثابت است.	۱) $(-\infty,-4)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $(-4,2]$

پاسخ: الف) $(2,+\infty)$ ب) $(-\infty,-4)$ پ) $(-4,2]$

درس ۲: ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای fog و gof نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$y=(fog)(x)=f\big(g(x)\big) \quad , \quad D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$y=(gof)(x)=g\big(f(x)\big) \quad , \quad D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

ایستگاه نکته

■ **به‌دست آوردن $(fog)(x)$ با داشتن $f(x)$ و $g(x)$:** ابتدا کل تابع g را در تابع f به‌جای xها قرار می‌دهیم تا fog به‌دست آید. سپس جواب آن را با fog که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به‌دست آید.

■ **به‌دست آوردن $g(x)$ با داشتن $f(x)$ و (fog):** در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x)=t$ سپس از این روابط x را برحسب t پیدا کرده و در روابط fog که به ما داده شده قرار می‌دهیم و در نهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

دست گرمی

اگر $f(x)=3\sqrt{x}+3$ و $f\big(g(x)\big)=3x^2-4$ آن‌گاه ضابطه تابع $g(x)$ را به‌دست آورید. (۱ نمره)

(امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ:

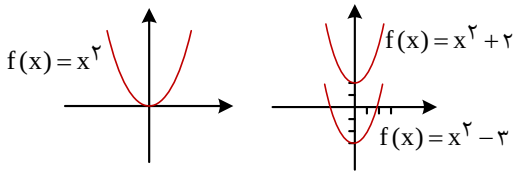
$$f\big(g(x)\big)=3\sqrt{g(x)}+2$$
$$3x^2-4=3\sqrt{g(x)}+2 \Rightarrow \sqrt{g(x)}=x^2-2 \Rightarrow g(x)=(x^2-2)^2 \quad , \quad |x|\geq\sqrt{2}$$

Konkoorsalam.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

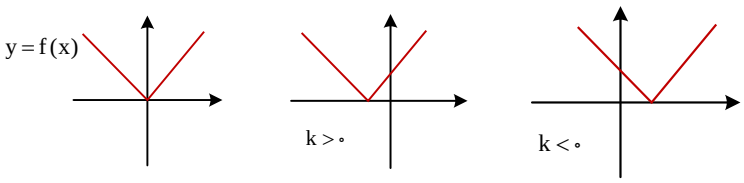
تبدیل نمودار توابع

انتقال‌های عمودی و افقی

- برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا و برای $k<0$ این انتقال را به سمت پایین انجام دهیم.

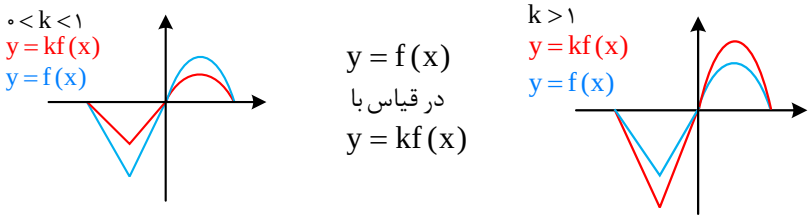


- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



انبساط و انقباض عمودی

- برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. یعنی طبق شکل‌های زیر برای حالت‌های $k>0$ و $0<k<1$ داریم:



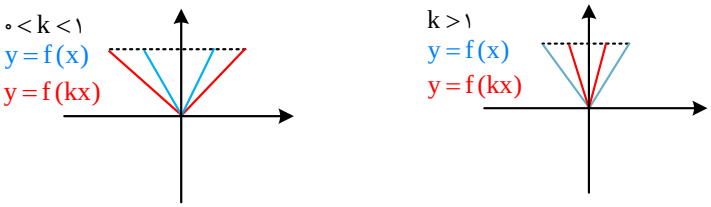
- اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

ایستگاه نکته

اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند.
بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

انبساط و انقباض افقی

- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.



Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
rhangiyanir
konkoorsalam
konkoorslm

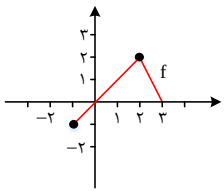
- اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

ایستگاه نکته

اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند.
بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

دست گرمی

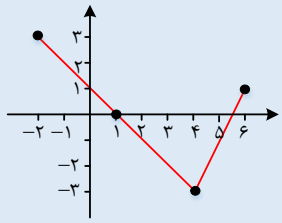
۱- در شکل زیر، نمودار $y=f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع $-2f\left(\frac{x}{2}\right)+1$ را رسم کنید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)



پاسخ درست: رسم دقیق هر پاره خط نمودار، هر کدام (۰/۵) نمره.

- دقت کنید در سوالات انتقال توابع، دامنه و برد حتماً به‌درستی مشخص شوند.

نمودار انتقال‌یافته:



ایستگاه نکته

- **دقت داشته باشید برای اعمال تغییرات روی تابع‌هایی به فرم $y=af(bx+c)+d$ اولویت و ترتیب اعمال تغییرات به این طریق است:**

$$a \quad f(bx+c)+d$$
سوم ← دوم ← اول ← چهارم

- **برای مثال در سوال دست‌گرمی قبلی، ترتیب و اولویت‌بندی مطابق مراحل زیر است:**

$$f(x) \xrightarrow{\text{xها ضربدر ۲}} f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{\text{yها ضربدر }-2} -2f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{\text{انتقال ۱ واحد به بالا}} -2f\left(\frac{x}{2}\right)+1$$

درس ۳: تابع وارون

- **توابع یک به یک:** هرگاه تابع f به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، این تابع وقتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشد و از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک به یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند.
- **توابع وارون:** اگر در تابع f جای x و y را با هم عوض کنیم، وارون f به‌دست می‌آید.

مثلا اگر $f=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ باشد، آنگاه $f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$ می‌باشد؛

همچنین اگر $g=\{(2,7),(1,9),(3,7)\}$ باشد، آنگاه $g^{-1}=\{(7,2),(9,1),(7,3)\}$ خواهد بود. ولی اگر دقت کنید، واضح است که f^{-1} خودش یک تابع است ولی g^{-1} تابع نیست. علت این است که f یک به یک بود ولی g یک به یک نبود، پس f وارون‌پذیر است، یعنی f^{-1} خودش یک تابع است.

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

ایستگاه نکته

۱- تابع f وقتی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد.

۲- دامنه f با برد f^{-1} و برد f با دامنه f^{-1} برابر است.

۳- ترکیب هر تابع با تابع وارون خود، برابر x می‌شود:

$$(fof^{-1})_{(x)} = x \qquad x \in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1}of)_{(x)} = x \qquad x \in D_f$$

اما به علت اختلاف در دامنه‌ها ← $(fof')_{(x)} \neq (f'of)_{(x)}$

دست گرمی

تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ **را درنظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.** (۱/۲۵) (امتحان نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ:

$$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$$

کپسول ۲۰

توابع یکنوا

- اکیداً صعودی: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$
- صعودی: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$
- اکیداً نزولی: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$
- نزولی: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$

انتقال

- عمودی
  - **انبساط** ← اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
  - **انقباض** ← اگر $0 < k < 1$ **باشد**، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- افقی
  - **انبساط** ← اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
  - **انقباض** ← اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

فصل دوم:

۲ مثلثات

کد هک

درس اول: تناوب و تانژانت

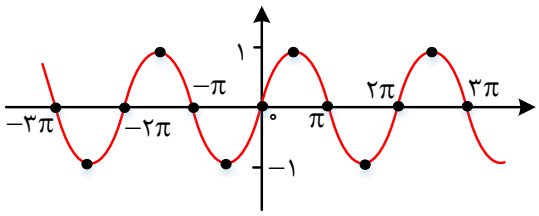
تناوب

- گاهاً دیده‌ایم که برخی از توابع و نمودارها در بازه‌ای مشخص تکرار می‌شوند، مثل توابع مثلثاتی که سال گذشته خواندیم.
- **تعریف:** تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد، به‌طوری‌که دو شرط برقرار باشد:

۱) $f(x\pm T)=f(x)$ و ۲) $x\pm T\in D_f$ (برای هر x که عضوی از D_f می‌باشد)

و کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره‌ی تناوب می‌نامیم.

برای مثال در نمودار $y=\sin x$ واضح است، در یک بازه مشخص، شاهدِ تکرار شدن یک الگوی مشخص هستیم:



- طبق نمودار، مشخص است که در بازه‌هایی به طول 2π، حالت تکرارشونده داریم. یعنی هر 2π (کوچک‌ترین مقدار مثبت) نمودار تکرار شده است و دوره تناوب $y=\sin x$ برابر با $T=2\pi$ می‌باشد.
- توجه کنید که اگر توابعی مثلثاتی مثل $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ را درنظر بگیریم، واضح است و مطابق آنچه در انتقال توابع خوانده‌ایم، ضریب b مربوط به دامنه می‌باشد که در تعیین دوره تناوب نقش دارد و ضرایب a و c در تعیین مقدار ماکزیمم و مینیمم مؤثر خواهند بود.

کپسول ۲۰

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ را فرض کنید؛ خواهیم داشت:

- دوره‌ی تناوب: $T=\dfrac{2\pi}{|b|}$
- مقدار ماکزیمم: $Max=|a|+c$
- مقدار مینیمم: $min=-|a|+c$

دست گرمی

۱- دوره‌ی تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=2-3\sin 4x$ را به‌دست آورید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ درست:

دوره تناوب $T=\dfrac{2\pi}{|4|}=\dfrac{\pi}{2}$ نمره (۰/۲۵) و مقدار ماکزیمم $Max=|-3|+2=5$ نمره (۰/۲۵)

Konkoorsalam.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

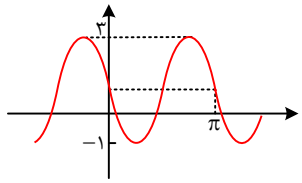
ایستگاه نکته

- **در سوالاتی که برحسب نمودارِ مثلثاتیِ آن، مقادیری را باید به‌دست آوریم؛ از اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم می‌توان ضریب a را یافت و با مقایسه آن با فرم اصلی نمودار مثلثاتی مربوطه به مقدار c هم رسید.**

- دوره تناوب هر که کم‌ترین بازه‌ی مثبتِ تکرارشونده است.
- در کل برای تشخیص مثبت بودن یا منفی بودن مقادیر a و b، فرم کلی تابع را با تابع مثلثاتیِ اصلی مقایسه کنید.

دست گرمی

۲- نمودار داده شده در شکل زیر، مربوط به تابع با ضابطه $y = a\sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ و مقادیر a و b و c را به‌دست آورید. (امتحان نهایی ۱۴۰۳)



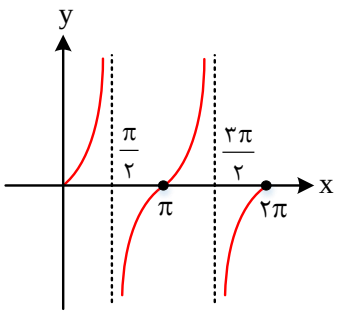
پاسخ درست:

$$\begin{cases} c = ۱ \quad \text{نمره } (۰/۲۵) \\ |a| = ۲ \xrightarrow[a>0]{} a = ۲ \quad \text{نمره } (۰/۲۵) \end{cases} \qquad T = \pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \xrightarrow[b<0]{} \underbrace{b = -۲}_{\text{نمره } (۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{نمره } (۰/۲۵)}$$

تانژانت

- مطابق شکل زیر، که نمودار تابع تانژانت را مشخص می‌کند، نشان‌دهنده‌ی متناوب بودن آن و دامنه‌اش می‌باشد.



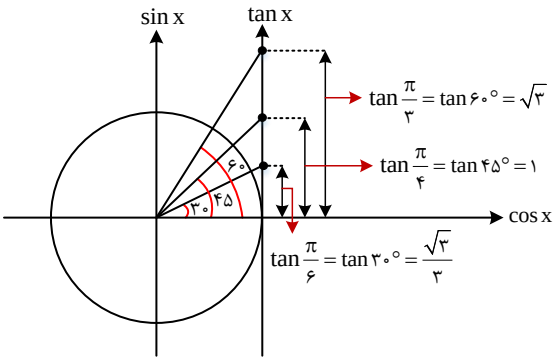
$$D_{\text{دامنه}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \;,\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- مطابق شکل، دوره تناوبِ تابع $f(x) = \tan x$ برابر $T = \pi$ است؛ و در حالت کلی، دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan ax$ برابر است با $T = \frac{\pi}{|a|}$.

ایستگاه نکته

- **به دامنه تابع تانژانت دقت کنید؛ با وجود صعودی بودن $y = \tan x$ در بازه‌های مشخص، این تابع در کل دامنه‌اش صعودی نیست.**
- **فقط در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.**

- اگر یک دایره مثلثاتی رسم کنیم و محور $\tan x$ را، می‌توان مقادیر آن را مقایسه کرد.
- برای مثال، مطابق نمودار زیر برای ربع اول داریم:



Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

➤ می‌توان نتیجه گرفت، با افزایش مقادیر زاویه در ربع اول، مقدار tan نیز افزایش می‌یابد.

کپسول ۲۰

در جدول زیر، مقادیر کاربردی در هر ربع از دایره مثلثاتی را همراه با مقدار tan آن مشخص کرده‌ایم:

ربع اول				ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم			
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت ن	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت ن	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

➤ پس مجدداً یادآور می‌شویم؛ تابع $y=\tan x$ در هر ربع مثلثاتی صعودی است، ولی به‌طور کلی در بازه $[0,2\pi]$ نمی‌توان صعودی یا نزولی بودن را مشخص کرد.

دست گرمی

۳- دامنه تابع $y=\tan(3x)$ برابر ..... است. (امتحان نهایی ۱۴۰۲)

پاسخ درست: $D=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\;,\; k\in\mathbb{Z}\right\}$ نمره (۰/۵)

ایستگاه نکته

■ **از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌دست آورد؛ درواقع داریم:**

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\xrightarrow{\ldots}\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$

■ **و با تفسیر β به $-\beta$ برای رابطه فوق خواهیم داشت:**

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

دست گرمی

۴- اگر $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ و $\tan\beta=-1$ باشد، آن‌گاه مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ درست:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\underbrace{\frac{\frac{2}{3}+(-1)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)(-1)}}_{\text{(۰/۵) نمره}}=\frac{\frac{-1}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{-1}{5}$$

(۰/۲۵) نمره

درس دوم: معادلات مثلثاتی

➤ **تعریف:** معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

➤ وقتی می‌بینیم مقدار $\sin x$ برابر با عددی شده است (و می‌دانیم که $-1\le\sin x\le 1$) در واقع حاصل برخورد آن مقدار با نمودار مثلثاتی $\sin x$ را بررسی می‌کنیم. مثلاً $\sin x=\frac{1}{2}$، تمامی نقاطی که خطوط $y=\frac{1}{2}$ و $y=\sin x$ برخورد دارند، حاصل معادله ما هستند؛ یا در پیدا کردن مقادیر آن روی آن دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله به وضوح مشخص است.

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

➤ پس برای یافتن $\sin x = a$ ابتدا آن را به‌صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌کنیم و با استفاده از حدس زاویه α جواب‌های $\sin x$ قابل تشخیص خواهند بود:

جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ $\left.\begin{matrix} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{matrix}\right\}$ که $k \in \mathbb{Z}$.

➤ به همین شکل، برای یافتن جواب‌های معادله $\cos x = b$ ابتدا آن را تبدیل به $\cos x = \cos \beta$ تبدیل می‌کنیم، برای جواب‌های آن $\cos x = \cos \beta$ خواهیم داشت: $\left.\begin{matrix} x = 2k\pi + \beta \\ x = 2k\pi - \beta \end{matrix}\right\}$ که $k \in \mathbb{Z}$.

➤ در نهایت برای جواب‌های معادله $\tan x = c$ که تبدیل می‌شود به $\tan x = \tan \theta$ خواهیم داشت؛

$\left. x = k\pi + \theta \right\}$ و $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

کپسول ۲۰

پس به‌صورت خلاصه برای هر یک از معادلات مثلثاتی زیر، جواب‌های کلی را خواهیم داشت که:

فرم‌های معادله	$\sin x = \sin \alpha$	$\cos x = \cos \alpha$	$\tan x = \tan \alpha$
جواب‌های کلی با شرط $k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi + \alpha$ $x = (2k+1)\pi - \alpha$	$x = 2k\pi \pm \alpha$	$x = k\pi + \alpha$

➤ توجه داشته باشید، در حل برخی از معادلات، به مرور و یادآوری از نکات و فرمول‌های سال‌های قبل نیاز داریم:

* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ * $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ با ترکیب و نتیجه‌گیری از فرمول‌ها $\rightarrow \cos 2\alpha = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$

دست گرمی

۵- جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $2 + 3\sin x = \cos 2x$ را به‌دست آورید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ درست:

$$\xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} 2 + 3\sin x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & \text{نمره } (0/25) \\ \sin x = \frac{-1}{2} & \text{نمره } (0/25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow (x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}) & \text{نمره } (0/25) \\ \sin x = \frac{-1}{2} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & \text{نمره } (0/25) \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \right) \quad \text{نمره } (0/25)$$

دست گرمی

۶- معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید. (امتحان نهایی ۱۴۰۲)

پاسخ درست:

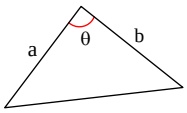
$$\xrightarrow{\text{دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم}} \underbrace{2\sin x \cos x = \frac{1}{2}}_{\text{نمره } (0/25)} \xrightarrow{\sin 2x = 2\sin x\cos x} \underbrace{\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{نمره } (0/25)}$$

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

دست گرمی

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} & \text{نمره } (۰/۲۵) \\ x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} & \text{نمره } (۰/۲۵) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ایستگاه نکته



- **اگر به یاد داشته باشید، مساحت یک مثلث را به کمک دو ضلع و زاویه بین آن می‌توانستیم به‌دست آوریم:**

$$S_{\text{مساحت}} = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$$

- **با توجه به این‌که در برخی سوالات، با استفاده از رابطه مذکور، یک معادله مثلثاتی را تشکیل می‌شود، یادآوری آن خالی از لطف نیست!**

فصل سوم:

۳ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس ۱- حد بی‌نهایت

قضیه: در تقسیم جمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای $(x-a)$، باقی‌مانده اقسیم برابر $f(a)$ است. پس اگر $f(a)$ برابر آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

مثلاً چند جمله‌ای $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است چون $f(۲)$ برابر صفر است (عدد ۲ ریشه معادله $x-۲=۰$ است) حالا با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ می‌توانیم $f(x)$ را به عومل اول خود تجزیه کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۲ - ۵x - ۲ & x-۲ \\ \hline -(۳x^۲ - ۶x) & ۳x+۱ \\ \hline x - ۲ & \\ -(x-۲) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۵x - ۲ = (x-۲)(۳x+۱)$$

عوامل اول

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$

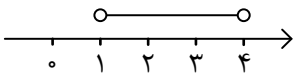
اگر حاصل حد تابع گویای $\frac{f}{g}$ در $x=a$ برابر $\frac{۰}{۰}$ شود به این معنا است که عبارت‌های f و g هر دو بر $(x-a)$ بخش‌پذیرند سپس آن‌ها را تک تک بر $(x-a)$ تقسیم می‌کنیم تا f و g به عوامل خود تجزیه شوند سپس عامل صفر شوند را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

ایستگاه نکته

- **اگر حاصل حد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $\frac{۰}{۰}$ شود و در f یا g یا هر دوی آن‌ها عبارت رادیکالی وجود داشت ابتدا صورت و مخرج را در عبارت یا عبارت‌های رادیکالی مناسب ضرب می‌کنیم تا به کمک اتحادها، عامل صفر شونده یعنی $(x-a)$ ایجاد شود و سپس آن را از صورت و مخرج ساده کنیم.**

مفهوم همسایگی:

همسایگی: هر بازهٔ باز مثل (a,b) شامل عدد حقیقی k را یک همسایگی k می‌نامیم مثلاً می‌توان گفت بازه $(۱,۴)$ یک همسایگی عدد ۳ است.



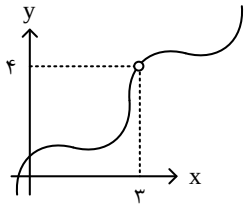
Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
rhangiyanir
konkoorsalam
konkoorslm

➤ **همسایگی راست و چپ:** به هر بازه به شکل $(k, k+b)$ یک همسایگی راست k می‌گوئیم $(b>0)$ و به هر بازه به شکل $(k-a, k)$ یک همسایگی چپ k می‌گوئیم $(a>0)$ مثلاً بازه $(3,4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(2,3)$ یک همسایگی چپ ۳ است.

➤ **همسایگی محذوف:** اگر خود عدد k را از همسایگی حذف کنیم به بازه $(a,b)-\{k\}$ یک همسایگی محذوف k می‌گوئیم مثلاً مجموعه $(1,4)-\{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ است.

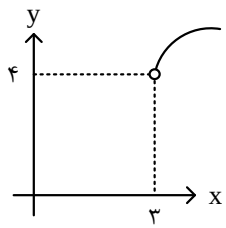
ایستگاه نکته

■ **کاربرد همسایگی یک عدد و همسایگی مجذوف یک عدد در مبحث حد است مثلا وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ، تابع f باشد در همسایگی محذوف ۳ تعریف شده باشد مثلاً در شکل مقابل حد تابع f در $x=3$ موجود و برابر ٤ است.**



$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

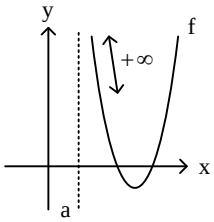
■ **ولی حد تابع g در $x=3$ موجود نیست و فقط حد راست دارد چون g فقط در همسایگی راست ۳ تعریف شده است.**



$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = 4$$

حد بی‌نهایت (نامتناهی)

➤ اگر جواب یک حد در یک نقطه برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود اصطلاحاً می‌گوئیم حد در آن نقطه وجود ندارد چون جواب حد باید عددی متناهی شود.



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

ایستگاه نکته

در محاسبه حد بی‌نهایت اگر L عددی مثبت باشد، داریم: $\frac{L}{0^+} = +\infty, \frac{L}{0^-} = -\infty$

در محاسبه حد بی‌نهایت اگر L عددی منفی باشد، داریم: $\frac{L}{0^+} = -\infty, \frac{L}{0^+} = +\infty$

دست گرمی

حدود زیر را محاسبه کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) (امتحان نهایی ۱٤۰٤)

الف) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{[x]-4}{4-x}$

Konkoorsalam.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\times\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4=12$

ب) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{[x]-4}{4-x}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-1}{4-x}=-\infty$

➤ بررسی قضیه‌هایی از حدهای بی‌نهایت:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x^n})=+\infty\ n\in\mathbb{N}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{1}{x^n})=\begin{cases}+\infty & n\in\mathbb{N},\text{زوج}\\ -\infty & n\in\mathbb{N},\text{فرد}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty\end{cases}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty\end{cases}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\xrightarrow{\text{آنگاه}}$

الف) $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\infty$ (+)

ب) $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\infty$ (−)

پ) $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\infty$ (+)

ت) $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\infty$ (−)

➤ **توجه:** قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ باشد نیز برقرار است.

۴) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty\xrightarrow{\text{آنگاه}}\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=0$

۵) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\xrightarrow{\text{آنگاه}}$

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$

ب) $L>0\xrightarrow{\text{آنگاه}}\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=+\infty$

پ) $L<0\xrightarrow{\text{آنگاه}}\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=-\infty$

دست گرمی

حدهای زیر را محاسبه کنید. ([ ] **نماد جزء صحیح است.**) (امتحان نهایی ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳)

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{[x]+\cos x}{\sin x})$ **ب)** $\lim\limits_{x\to 1^+}(\dfrac{[2x]-1}{x-1})$

پاسخ: منظور از 0^+ همان $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x$ است.

الف) روش اول: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{[x]+\cos x}{\sin x})=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ (۰/۲۵ + ۰/۲۵ + ۰/۲۵)

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

الف) روش دوم: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{[x]+\cos x}{\sin x}\right)=\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{0+\cos x}{\sin x}\right)}_{(0/25)}=\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x}^{(0/25)}=+\infty$ (۰/۲۵)

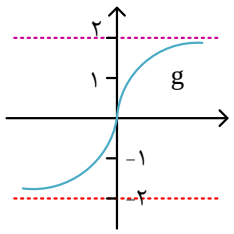
ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{[2x]-1}{x-1}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$ (۰/۵)

درس دوم: حد در بی‌نهایت

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)L$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

تعریف: اگر تابع f در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ هرگاه بتوان با اختیارهای به پ قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از L به ار اندازه کوچک کرد.

برای مثال در تابع زیر و حدهای آن در بی‌نهایت داریم:



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$

در تئتکخ قضیه‌هایی که خواندیم، قضیه‌های دیگری نیز وجود دارد که بررسی می‌کنیم:

۶) اگر $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}\xrightarrow{\text{آنگاه}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a}{x^n}\right)=0$

۷) اگر $L_1,L_2\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L_2\xrightarrow{\text{آنگاه}}$

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\pm g)(x)=\lim f(x)\pm\lim g(x)=L_1\pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L_1L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\ (L_2\neq 0)$

توجه: قضیه ۷ وقتی x به $-\infty$ میل کی‌کند نیز برقرار است.

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در حالت کلی برای یک تابع f در یک بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده است، اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند، می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(به طور مشابه برای $x\to-\infty$ نیز به همین ترتیب داریم)

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

➤ **و حالا بررسی ۳ قضیه بسیار حیاتی و مهم:**

۸) اگر $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{آنگاه}}$
- الف) n زوج باشد $\rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^n)=+\infty$
- ب) n فرد باشد $\rightarrow$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n)=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^n)=-\infty$

۹) اگر $L\in\mathbb{R}(L\neq 0),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty \xrightarrow{\text{آنگاه}}$

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=$
- اگر L مثبت باشد $+\infty$
- اگر L منفی باشد $-\infty$

➤ **توجه:** قضیه ۹ در حالتی که $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ نیز، به طریق مشابه برقرار است.

۱۰) اگر $L\in\mathbb{R}(L\neq 0),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty \xrightarrow{\text{آنگاه}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x).\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=$
- اگر L مثبت باشد $+\infty$
- اگر L منفی باشد $-\infty$

➤ **توجه:** قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ نیز باشد به طور مشابه برقرار است.

ایستگاه نکته

به طور کلی، حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ **در** $\pm\infty$ **برابر چند جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است، یعنی:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

دست گرمی

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ( ] نماد جزء صحیح است.) (امتحان نهایی ۱۴۰۴ و ۱۴۰۳)

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3+5x+2}{7x^2+3x^2}\right)$ **ب)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{1-x^2}\right)$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x+1)$

پاسخ:

الف) روش اول: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3+5x+2}{7x^3+3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3}{7x^3}\right)=\frac{-4}{7}$ **(۰/۵)**

الف) روش دوم: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3(-4+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x^3(7+\frac{3}{x})}\right)=\frac{-4}{7}$ **(۰/۵)**

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right)=-2$ **(۰/۵)**

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$ **(۰/۵)**

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

فصل چهارم:

٤ مشتق

کد هک

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

- در دو فصل پیش رو، قضایای مربوطه رو مرور میکنیم و هرفرمولی که بصورت قطعی ازش سوال داریم.
- شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a\ ,\ f(a))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A : $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.
- حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند ، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- البته حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می نامند.
- اما دستور دیگری هم برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده تر می کند:

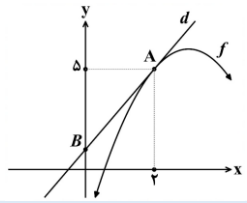
ایستگاه نکته

$f'(a)$ را از فرمول زیر که هم راحت تر و هم کاربردی تر است می توان بدست آورد.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

دست گرمی

۱- در شکل زیر خط d بر نمودار تابع f در نقطه $A(۲،۵)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-۲$ ، آنگاه معادله خط d و عرض نقطه B را بدست آورید. (امتحان نهایی ۱٤۰٤)



پاسخ درست:

$\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'(۲)$ (۰،۲۵) $\Rightarrow f'(۲)=m=۲$ (۰،۲۵)

معادله خط d : $y=۲x+۱$ (۰،۲۵) عرض نقطه B : $y_B=۱$ (۰،۲۵)

درس دوم : مشتق پذیری و پیوستگی

- **قضیه:** اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.
- **اثبات:** کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))$$
$$=\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=۰.f'(a)=۰$$

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

توجه : اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد ، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

➤ **تعریف :** مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

➤ **یا به طور معادل:**

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➤ **مماس قائم :** اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این صورت خط $x=a$ را (مماس قائم) بر منحنی f در نقطه $(a\ ,\ f(a))$ می نامیم.ب دیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

ایستگاه نکته

■ **تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد :**

۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نا متناهی باشد (نقطه گوشه ای).

پ) هردو نا متناهی باشند.

➤ **دامنه مشتق:** اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد ، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

➤ مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

دست گرمی

۲. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\geq 1\\ 4x & x<1\end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ درست:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(0.25)}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2\ (0.25)$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(0.25)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{4x-4}{x-1}=4\ (0.25)$$

بنابر این تابع f در نقطه $x=1$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵)

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

کپسول ۲۰

قوانین مشتق:

۱- اگر $f(x)=c$ آن گاه $f'(x)=0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

۲- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$.

۳- طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$ آنگاه : $f'(x)=nx^{n-1}$.

۴- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

۵- اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آنگاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

۶- اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آنگاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

توجه : در موارد ۴ و ۵ و ۶ ، اثبات ذکرشده در کتاب درسی هم بررسی کنید که احتمال سوال اومدن از اون هست !

۷- اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$ ، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}\ (g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

➤ **مشتق تابع مرکب :** اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

ایستگاه نکته

- **اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:**

$$u=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

دست گرمی

۳. مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست). (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

ب) $g(x)=(x^3-5x)(\sqrt{x^2+1})$

پاسخ درست:

ب) $g'(x)=(3x^2-5)(\sqrt{x^2+1})+(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})(x^3-5x)$

(۰.۲۵ روی $3x^2-5$، ۰.۲۵ روی $\sqrt{x^2+1}$، ۰.۲۵ روی x^3-5x)

ایستگاه نکته

مشتق پذیری در بازه ها:

- **تابع f روی بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق پذیر است هر گاه ، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.**
- **تابع f روی بازه $[a\ ,\ b]$ مشتق پذیر است ، هر گاه f در بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.**

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

مشتق مرتبه دوم :

➤ اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می گیریم.

درس سوم : آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

➤ در حالت کلی، در بسیاری از پدیده ها و مطالعات که در قالب یک تابع بیان می شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می شویم. تحت دو نکته و خیلی خلاصه مفاهیم زیر که هرسال سوال ازشون میاد و به راحتی میشه جواب داد رو بررسی می کنیم.

➤ **آهنگ متوسط تغییر تابع :** آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a\ ,\ a+h]$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➤ **آهنگ تغییر لحظه ای تابع :** آهنگ تغییر لحظه ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

توجه: آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

دست گرمی

۵. الف) اگر f تابعی پیوسته با دامنه اعداد حقیقی باشد و $f(۳)=۸+f(۱)$ ، آنگاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازه $[۱,۳]$ بدست آورید.

ب) آهنگ تغییر لحظه ای تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطه $x=۲۷$ بدست آورید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ درست:

الف) $\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=\frac{f(۱)+۸-f(۱)}{۲}=۴$ (۰.۲۵ ، ۰.۲۵)

ب) $g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow g'(۲۷)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}}=\frac{۱}{۲۷}$ (۰.۲۵ ، ۰.۲۵)

فصل پنجم:

۵ کاربرد مشتق

درس ۱- اکسترمم‌های تابع

یک‌نواختی تابع و ارتباط آن با مشتق

➤ در یک بازه از دامنهٔ f، اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد آن‌گاه f در آن باره اکیداً صعودی است.

➤ اگر f' موجود و منفی باشد آن‌گاه f در این بازه اکیداً نزولی است.

➤ اگر f' در یک بازه موجود و برابر صفر باشد آن‌گاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

➤ **مثال:** تابع $f(x)=x^۳-۳x+۵$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیدا نزولی است؟

➤ **پاسخ:** f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)+۳x^۲-۳=۰\to^۲=۱\to x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	$-\infty$	↗	۷	↘	۳	↗	$+\infty$

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

پس f در بازهٔ $(-1,1)$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ اکیدا صعودی است.

اکسترمم‌های نسبی

- گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.
- گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ایستگاه نکته

۱- به نقاط ماکزیمم و مینیممم نسبی، اکسترمم نسبی هم می‌گوئیم.
۲- نقاط روی یک پاره خط افقی، هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی محسوب می‌شوند.
۳- نقاط ابتدا و انتهایی یک بازه اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شود (چون تابع فقط در یک طرف آن‌ها وجود دارد.)

دست گرمی

تابع $f(x)=x^3-12x+4$ را در نظر بگیرید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

الف) بزرگ‌ترین بازه که تابع f در آن نزولی آلید است را به دست آورید. (۱ نمره)

ب) طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید. (۰/۲۵ نمره)

پاسخ:

الف) $[-2,2]$ $\qquad f'(x)+3x^2-12=0 \rightarrow x=\pm 2$

ب) با توجه به جدول تغییرات طول ماکزیمم نسبی $x=-2$

x		-2		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗

اکسترمم‌های مطلق

- با فرض $c \in D_f$، نقطه $(c,f(c))$ یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود. هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$ در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.
- با فرض $c \in D_f$، نقطه $(c,f(c))$ یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

نقاط بحرانی تابع

نقاطی از دامنه f که f' در آن‌ها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آن‌ها برابر صفر است. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، آن‌ها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم.

- **تعریف:** فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه‌ی به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

قضیه نوعی: اگر تابع f در نقطه به طول f در نقطه c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$ به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ایستگاه نکته

۱- نقاط ابتدا و انتهای دامنه می‌توانند اکسترمم مطلق باشند.
۲- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی است اما هر نقطه بحرانی، لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

دست گرمی

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

نقطه به طول c از دامنه تابع f که در آن $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطه ..... می‌نامیم. **(۰/۲۵)**

پاسخ: بحرانی

یافتن اکسترمم‌های مطلق با کمک نقاط بحرانی

۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم.

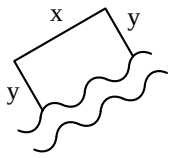
۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳- بزرگ‌ترین عدد به دست آمده مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع است.

درس ۲- بهینه سازی

➢ در این قسمت می‌خواهیم به کمک تعیین نقطه یا نقاط بحرانی و تعیین علامت مشتق مقدار دو یا یک متغیر را طوری تعیین کنیم که مقدار متغیر سوم، ماکزیمم یا مینیمم شود در این گونه مسائل، عبارت اصلی که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود فقط باید شامل یک متغیر باشد ولی اگر دارای ۲ متغیر بود به کمک اطلاعات مسئله آن‌ها به یک متغیر تبدیل می‌کنیم سپس معادله $y'=0$ را حل می‌کنیم تا نقطه یا نقاط بحرانی به دست آیند و در نهایت y' را تعیین علامت می‌کنیم.

دست گرمی



می‌خواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محیط به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده‌کشی کنیم اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم به کمک جدول تغییرات بیشترین محاسبات ممکن برای این مستطیل محاسبه کنید. **(۱/۵)** (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ:

$$x+2y=100 \rightarrow x=100-2y$$

$$S=x.y=(100-2y)y=100y-2y^2$$

$$S'(y)=100-4y=0 \rightarrow y=25$$

$$S_{max}=50\times 25=1250$$

x	۰	۲۵	۵۰
S'		+	-
S		↗	↘

کپسول ۲۰

یکنواختی تابع
f' موجود و مثبت ← f اکیداً صعودی
f' موجود و صفر ← تابعی ثابت
f' موجود و منفی ← اکیداً نزولی

اکسترمم

- نسبی
  - Max: یک همسایگی از c مانند I که برای هر $x\in I$ داریم $f(c)\geq f(x)$
  - Min: یک همسایگی از c مانند I که برای هر $x\in I$ داریم $f(c)\leq f(x)$
- مطلق
  - Max: با فرض $c\in D_f$ و به ازای هر x از D_f $f(c)\geq f(x)$
  - Min: با فرض $c\in D_f$ و به ازای هر x از D_f $f(c)\leq f(x)$

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

فصل ششم:

۶ هندسه

درس ۱- تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

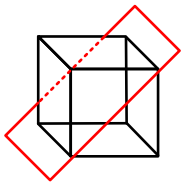
دوران حول محور:

وقتی شکل‌های هندسی را حول یک محور دوران دهیم شکل‌های دو بعدی یا سه بعدی ساخته می‌شوند.

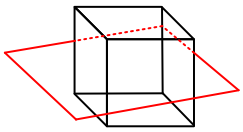
- شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است یک دایره است.
- شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن، یک استوانه است.
- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه، یک مخروط است.
- شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن، یک کره است.
- شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیم کره است.

برش:

- **تعریف سطح مقطع:** می‌خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم، شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

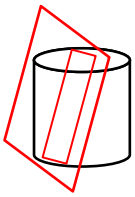


سطح مقطع: مستطیل

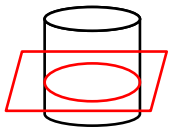


سطح مقطع: مربع

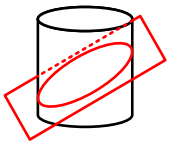
- سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه، متقاطع نباشد به شکل‌های زیر است:



سطح مقطع: مستطیل



سطح مقطع: دایره



سطح مقطع: بیضی

دست گرمی

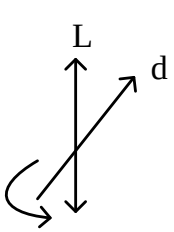
جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۰/۲۵) (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

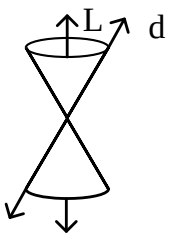
شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک اضلاع قائمه آن ..... است.

پاسخ: یک مخروط

آشنایی با مقاطع مخروطی:

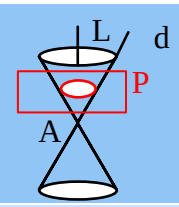
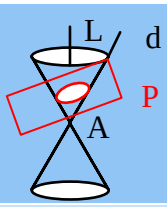
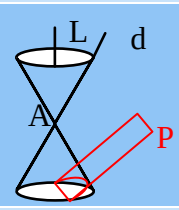
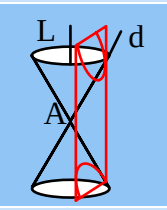
دو خط d و L در یک نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط L دوران کامل دهیم شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط L محور، نقطه A رأس و خط d مولد این سطح مخروطی است.





وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود معمولا سطح یک سختی است. از آن‌جا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند. انواع مقاطع مخروطی به صورت زیر است:

Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
konkoorsalam
konkoorslm

	
اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.	اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد شکل حاصل بیضی خواهد بود.
	
اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یک سطح سهمی است.	اگر صفحه P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل را هزلولی می‌نامیم.

دست گرمی

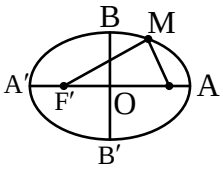
جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (۰/۲۵) (امتحان نهایی ۱۴۰۳)

اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است.

پاسخ: سهمی

بیضی:

بیضی شامل تمام نقاطی از صفحه مانند M است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت F و F' (کانون‌ها) برابر با مقدار ثابت ۲a می‌باشد.



$$\Rightarrow MF + MF' = ۲a$$

ضمناً به A و A' رأس‌های کانونی می‌گوئیم.

ایستگاه نکته

- **اگر نقطه M خارج بیضی باشد** ← $MF + MF' > ۲a$
- **اگر نقطه M داخل بیضی باشد** ← $MF + MF' < ۲a$
- **طول قطر بزرگ بیضی** ← $AA' = ۲a$
- **طول قطر کوچک بیضی** ← $BB' = ۲b$
- **فاصله کانونی بیضی** ← $FF' = ۲c$
- **مرکز بیضی** ← $O(\alpha, \beta)$
- **رابطه بین پارامترهای بیضی** ← $a^۲ = b^۲ + c^۲$
- **خروج از مرکز بیضی** ← $e = \frac{c}{a} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین صفر و یک است هر چقدر e به ۱ نزدیک‌تر باشد بیضی کشیده‌تر است و هر چقدر e به صفر نزدیک‌تر باشد بیضی به دایره شبیه‌تر است.

دست گرمی

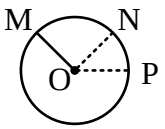
کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است، اگر اندازه نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی را به دست آورید. (۱ نمره) (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ:

$$\begin{cases} ۲c = ۳-(-۵) = ۸ \to c = ۴ \\ a = ۵ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow ۲b = ۶$$

درس ۲- دایره

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامیم.



$OM = ON = OP = r$

معادله استاندارد و گسترده دایره:

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد شکل استاندارد معادله دایره به صورت $(x-\alpha)^۲+(u-\beta)^۲=r^۲$ می‌باشد مثلا معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(-۱,۴)$ و به شعاع ۳ برابر است با: $(x+۱)^۲+y-۴)^۲=۹$

و شکل گسترده معادله دایره به صورت روبه‌رو است: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

در این حالت شعاع دایره به صورت $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ و مرکز آن $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است.

ایستگاه نکته

■ **شرط تشکیل دایره: فقط اگر $a^۲+c^۲-۴c>۰$ باشد یک دایره تشکیل خواهد شد.**

دست گرمی

اگر در مرکز دایره $x^۲+y^۲+ax-۴y-۴=۰$ فقط $O(۱,۲)$ باشد مقدار a و شعاع دایره را به دست آورید. (۱ نمره) (امتحان نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}\to r=۳$$

$$-\frac{a}{۲}=۱\to a=-۲$$

وضعیت نقطه نسبت به دایره:

معادله استاندارد و گسترده دایره را داریم:

شکل استاندارد: $\underbrace{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۱-r^۲}_{f}=۰$

شکل گسترده: $\underbrace{x^۲+y^۲+ax+by+c}_{f}=۰$

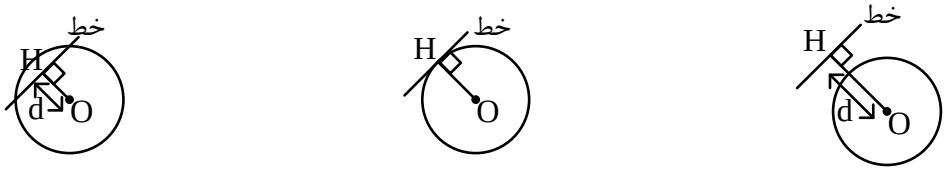
مختصات داده شده را در تابع f به جای x و yها قرار می‌دهیم اگر حاصل مثبت شد نقطه خارج دایره، اگر منفی شد نقطه داخل دایره و اگر صفر شد نقطه روی دایره است.

Konkoorsalam.ir SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

وضعیت خط نسبت به دایره

➤ برای بررسی وضعیت هر خط نسبت به دایره ابتدا فاصله مرکز دایره تا آن خط را به دست می‌آوریم و آن را d می‌نامیم سپس d را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم و می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



اگر خط دایره را قطع نکند
$d > r$

اگر خط بر دایره مماس باشد
$d = r$

اگر خط با دایره متقاطع باشد
$d < r$

ایستگاه نکته

خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

دست گرمی

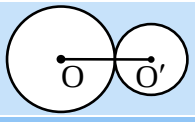
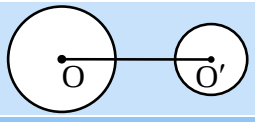
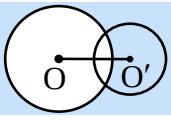
معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $(1,-2)$ بود و بر خط $4x-3y=25$ می‌باشد. (۱ نمره) (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ:

$$r=\frac{|4+6-25|}{\sqrt{16+9}}=3 \qquad (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

➤ فرض می‌کنیم ۲ دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' موجود باشند در این صورت اگر $R > R'$ باشد و OO' را d (خط المرکزین) بنامیم حالت‌های زیر را داریم:

$d = R - R'$	$d = R + R'$	$d > R + R'$
		
$d = 0$	$d < R - R'$	$R - R' < d < R + R'$
		

Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
rhangiyanir
konkoorsalam
konkoorslm

کپسول ۲۰

وضعیت دایره با:

- نقطه - حاصل معادله دایره:
  - مثبت ← خارج دایره
  - صفر ← روی دایره
  - منفی ← داخل دایره
- خط:
  - قطع نکند ← $d > r$
  - مماس باشد ← $d = r$
  - متقاطع باشد ← $d < r$
- دایره
  - متخارج ← $d > R + R'$
  - مماس بیرون ← $d = R + R'$
  - مماس درون ← $d = R - R'$
  - متقاطع ← $R - R' < d < R + R'$
  - متداخل ← $d < R - R'$
  - هم مرکز ← $d = ۰$

۷ فصل هفتم: احتمال

مبانی احتمال

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضاب نمونه آن پدیده می‌نامیم و با S نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آن‌ها: فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشد. داریم:

- اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.
- استراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.
- تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.
- متمم یک پیشامد: پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد $P(A') = ۱ - P(A)$

۵- احتمال وقوع یک پیشامد: $P(A) \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$

۶- احتمال اجتماع دو پیشامد A و B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوئیم. هرگاه A و B با هم رخ ندهند به بیان دیگر $A \cap B = \varnothing$ در این صورت داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۸- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

۹- احتمال شرطی: منظور از (احتمال A به شرط B) که آن را با $P(A \mid B)$ نمایش می‌دهیم احتمال وثوع پیشامد A است به شرط آن‌که بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم: $(P(B) \neq ۰)$ $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Konkoorsalam.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm SanjeshCloud

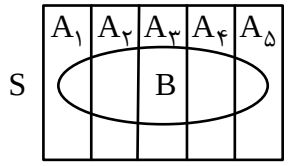
ایستگاه نکته

- **اگر A و B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند آن‌گاه:** $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$
- **اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند آن‌گاه:**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$
$$P(A-B)=P(A)-P(A).P(B)$$

- **در حالتی که $P(B)=0$ باشد، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود. (در احتمال شرطی)**

قانون احتمال کل:



- پیشامد A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده‌اند و B یک پیشامد دلخواه است در این صورت داریم:

$$B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)\cup(B\cap A_4)\cup(B\cap A_5)$$

- که در آن $B\cap A_i$ و $B\cap A_j$ برای هر $i\neq j$ ناسازگارند بنابراین داریم:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+P(B\cap A_4)+P(B\cap A_5)=\sum_{i=1}^{5}P(B\cap A_i)$$

- و طبق احتمال شرطی داریم:

$$P(B\mid A_i)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)}\Rightarrow P(B\cap A_i)=P(A_i)P(B\mid A_i)$$

- و بنابراین رابطه پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد که قانون احتمال کل است:

$$p(B)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

ایستگاه نکته

در حالت کلی اگر A_1 و A_2 و... A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوئیم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

دست گرمی

دو جعبه یکسان داریم، درون یکی از آن‌ها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵تا از آن‌ها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می‌آوریم چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟ (۱/۲۵) (امتحان نهایی ۱۴۰۴)

پاسخ: اگر پیشامد سالم بودن را A و جعبه اول را B_1 و جعبه دوم را B_2 در نظر بگیریم آن‌گاه داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$
$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{15}{20}=\frac{6}{20}+\frac{15}{40}=\frac{27}{40}=0/675$$

Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
rhangiyanir
konkoorsalam
konkoorslm

کپسول ۲۰

پیشامدهای ناسازگار: A و B با هم رخ ندهند: $(A \cap B = \varnothing)$ و $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

پیشامدهای مستقل: وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر ندارد و $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

احتمال

کل: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$

شرطی: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Konkoorsalam.ir rhangiyanir konkoorsalam konkoorslm
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تدریس ویدیویی
شب امتحان نهایی

| پوشش کامل امتحانات نهایی دوازدهم + ۶ درس موثر یازدهم |

| فقط ۵ تا ۸ ساعت برای هر درس |

برای کسب نمره بیست همین کلاس کافیست

ویژه داوطلبان رشته‌های تجربی، ریاضی و انسانی

| دروس عمومی ویژه کنکوری‌های هنر و زبان |

دروس عمومی


عماد فیض‌آبادی
ادبیات فارسی


مرتضی محسنی کبیر
دین و زندگی


میلاد قریشی
زبان انگلیسی


علی فرامرزی
عربی


حمید اثباتی
هویت اجتماعی


فرزین فردوسی
سلامت و بهداشت

دروس انسانی


اصغر حجازیان
فلسفه


مصطفی رضایی‌مهر
تاریخ و جغرافیا


علی فرامرزی
عربی


حمید اثباتی
جامعه شناسی


محمد جواد بانشی
علوم و فنون


آروین حسینی
ریاضی و آمار

دروس تجربی


شهریار صفرزاده
زیست شناسی


احسان ایرانی
فیزیک


حامد علیخانی
ریاضی


محمدرضا میرقائمی
شیمی

دروس ریاضی


محمدرضا میرقائمی
شیمی


احسان ایرانی
فیزیک


حسین افشار
هندسه و گسسته


حامد علیخانی
حسابان

برای دریافت مشاوره رایگان، نمونه تدریس‌ها و ثبت‌نام در دوره کلمه «**امتحان**» را به پشتیبانی کنکورسلام ارسال فرمایید.

Konkoorsalam.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir
rhangiyanir
konkoorsalam
konkoorslm

دفترچه سوال

رشته تجربی

کنکورسلام

مدرسه علاقه‌مندان فرهنگیان

آزمون مانور امتحان نهایی

نوبت دوم	پایه دوازدهم	ریاضی

درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
ریاضی	۲	۱۲۰ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش الکترونیکی یا غیره پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز کنکورسلام مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات برخورد قانونی صورت می‌پذیرد

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکات طلایی برای ۲۰ گرفتن

۱ خوش خط و خوانا بنویسید.

دستخط خوانا کمک می‌کند مصحح بدون سردرگمی پاسخ‌های شما را ببیند و نمره‌ی کامل را به شما اختصاص دهد. اگر نوشته‌های شما ناخوانا باشد، احتمال خطای مصحح و کسر نمره افزایش می‌یابد.

۲ از عبارات و جملات کلیدی کتاب درسی استفاده کنید.

به‌کارگیری واژگان و اصطلاحات دقیق کتاب درسی نشان می‌دهد که مطالب را عمیقاً فهمیده‌اید و تنها به حفظ کردن بسنده نکرده‌اید. با این کار تسلط شما بر محتوای کتاب به مصحح نشان داده می‌شود.

۳ حتی اگر پاسخ را کامل بلد نیستید، صفحه را خالی نگذارید.

در بسیاری از سوالات، نوشتن بخشی از راه‌حل یا اشاره به مفاهیم مرتبط، نمره‌ی جزئی دارد. یک پاسخ ناقص بهتر از پاسخ خالی است؛ بنابراین در هر سوال، هر آنچه از آن مبحث به یاد دارید بنویسید.

۴ تمام مراحل حل سوال را به طور کامل و پشت سر هم بنویسید.

بارم هر سوال معمولاً بین مراحل مختلف تقسیم می‌شود. اگر فقط جواب نهایی را بنویسید، ممکن است نمره‌ی مراحل حل سوال را از دست بدهید. سعی کنید تا جایی که می‌توانید تمام مراحل حل سوال را بنویسید.

۵ یکاها را در جواب پایانی حتماً ذکر کنید.

فراموش کردن یکاها می‌تواند باعث کسر نمره شود. حتی اگر سوال به صراحت درخواست یکا نکرده، نوشتن آن نشان‌دهنده‌ی دقت شماست.

۶ زمان‌بندی را مدیریت کنید و اول سوالات ساده‌تر را پاسخ دهید.

با پاسخ دادن به سوالاتی که مطمئن هستید، هم زمان ذخیره می‌کنید هم اعتماد به نفس می‌گیرید. سپس به سراغ سوالات دشوارتر بروید.

۷ صورت سوال را با دقت بخوانید و کلمات کلیدی آن را مشخص کنید.

بسیاری از اشتباهات ناشی از درک نادرست خواسته‌ی سوال است. زیر کلمات مهم سوال خط بکشید و با دقت آنها را بررسی کنید.

۸ پس از پایان پاسخ‌دهی، حتماً چند دقیقه برای بازخوانی و اصلاح پاسخ‌ها وقت بگذارید.

در این بازخوانی می‌توانید غلط‌های املایی، محاسباتی و جاافتادگی‌ها را تصحیح کنید.

۹ آرامش خود را حفظ کنید و اضطراب را کنترل کنید.

استرس باعث کاهش تمرکز و افزایش خطا می‌شود. چند نفس عمیق قبل از شروع امتحان و تکیه بر آمادگی قبلی به شما کمک می‌کند.

Konkoorsalam.ir konkoorsalam
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

باسمه تعالی

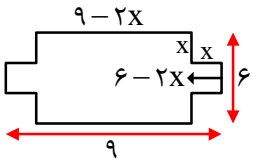
سوالات آزمون نهایی درس: **ریاضی (۳)**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **علوم تجربی**	تاریخ آزمون: / /
تعداد صفحه: **۲ صفحه**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۷:۳۰ به وقت تهران**	**نام و نام خانوادگی:**
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقهٔ تحصیلی (داخل و خارج از کشور)			کنکور سلام، مرجع تخصصی قبولی فرهنگیان www.konkoorsalam.ir

ردیف	«سوالات»	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) یک تابع وقتی یک به یک است که حداکثر در یکی از زوج مرتب ها ، عضو دوم مساوی داشته باشد. ب) اگر خود یک عدد را از همسایگی حذف کنیم، به بازه ای که تشکیل می دهد، همسایگی محذوف آن عدد گوییم. پ) هر نقطه بحرانی، لزوما یکی از اکسترمم های نسبی آن تابع است.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن، یک ..... است. ب) مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)=\frac{x^4}{4}$ برابر با ..... است.	۰/۵
۳	دو معادله مثلثاتی زیر داده شده است؛ پاسخ هریک از آن‌ها را از بین موارد نوشته شده، انتخاب کنید و در پاسخبرگ بنویسید. الف) $\tan x = \tan 3x$ ب) $4\cos^2 x - 1 = 0$ ۱) π ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$	۰/۵
۴	اگر $f=\{(5,1),(3,7),(-1,9),(11,2)\}$ و $g=\{(7,4),(2,-1),(3,3),(1,-5)\}$ باشد، تابع gof را تشکیل دهید.	۰/۷۵
۵	اگر $f(x)=4x^2-1$ باشد: الف) وارون این تابع به شرط $x\geq 0$ و دامنه اش را بدست آورید. ب) حاصل مقدار $\left(fof^{-1}\right)(\frac{1}{2})$؟	۱/۲۵
۶	دوره تناوب مقادیر و ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=2\cos 3x-5$ را بدست آورید.	۰/۷۵
۷	جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را بدست آورید.	۱/۵
۸	حاصل حدهای زیر را بدست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to(-1)} \frac{x^3+1}{2x^2-6x-8}$ ب) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{-3x+5}{x^2-16}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-9x^3+5x-4}{3x^3+2x^2-1}$	۱/۷۵
۹	به کمک تعریف مشتق ثابت کنید که اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد و $x>0$ آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.	۱/۲۵

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

باسمه تعالی

سوالات آزمون نهایی درس: **ریاضی (۳)**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **علوم تجربی**	تاریخ آزمون: / /
تعداد صفحه: **۲ صفحه**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۷:۳۰ به وقت تهران**	**نام و نام خانوادگی:**
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقهٔ تحصیلی (داخل و خارج از کشور)			کنکور سلام، مرجع تخصصی قبولی فرهنگیان www.konkoorsalam.ir

۱۰	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & x\le 2 \\ 4x-9 & x>2 \end{cases}$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۱	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{3x+4}$ ب) $g(x)=(3x^2-1)(\sqrt{x}+2)$	۱/۷۵
۱۲	تابع f را با ضابطه $f(x)=2x^2-3$ در نظر بگیرید: الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0,2]$ را بدست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x=-3$ را بدست آورید.	۱
۱۳	مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-8x$ را بدست آورید.	۱/۵
۱۴	برای ساختن یک جعبه فلزی، لازم است مربع های همنهشت را از چهارگوشه ورقه فلزی که به ابعاد ۶متر در ۹متر داریم، جدا کنیم. اگر بخواهیم حجم این جعبه ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع هایی که باید جدا شود، چقدر است؟ 	۱/۵
۱۵	در یک بیضی، یکی از رئوس اصلی $A(1,4)$ و یکی از کانون ها $F(1,0)$ و مرکز بیضی $O(1,-2)$ می باشد. کانون دیگر این بیضی و خروج از مرکز آن را بدست آورید.	۱/۵
۱۶	مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله $x^2+y^2-x+3y-m=0$ مربوط به دایره ای با شعاع ۳ باشد.	۱/۲۵
۱۷	یک خانواده ۵ فرزند دارد، احتمال اینکه فرزند اول دختر و فرزند آخر پسر باشد، چقدر است؟	۱/۲۵
	«موفق باشید» جمع	۲۰

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دفترچه پاسخ

رشته تجربی

کنکورسلام

مدرسه علاقه‌مندان فرهنگیان

آزمون مانور امتحان نهایی

نوبت دوم | پایه دوازدهم | ریاضی

راهنمای پاسخنامه

جواب طلایی: این قسمت همان پاسخ لازم برای گرفتن نمره در امتحان است.

چرایی درخشان: اینجا با استدلال کامل توضیح داده‌ایم که چرا این پاسخ صحیح است.

فراتر از سوال: این بخش تمایز اصلی ماست! در این بخش، با استفاده از جدول، نمودار درختی، نکات ترکیبی و... فراتر از سوال، درباره آن موضوع نکات مهم را ذکر کرده‌ایم.

پشتوانه طلایی: آدرس دقیق هر سوال در کتاب درسی در این بخش آمده است.

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش الکترونیکی یا غیره پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز کنکورسلام مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات برخورد قانونی صورت می‌پذیرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

باسمه تعالی

پاسخ تشریحی آزمون نهایی درس: **ریاضی (۳)**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **علوم تجربی**	تاریخ آزمون: / /
تعداد صفحه: **۱۴ صفحه**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۷:۳۰ به وقت تهران**	**نام و نام خانوادگی:**
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقهٔ تحصیلی (داخل و خارج از کشور)			**کنکور سلام، مرجع تخصصی قبولی فرهنگیان www.konkoorsalam.ir**

ردیف	«راهنمای تصحیح»	نمره
۱	**جواب طلایی** **الف)** نادرست (۰/۲۵) **ب)** درست (۰/۲۵) **پ)** نادرست (۰/۲۵) **چرایی درخشان** **الف)** یک تابع وقتی که یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشد. **پ)** هر نقطه بحرانی لزوماً نمی تواند یکی از اکسترمم های نسبی آن تابع باشد. **فراتر از سوال** **الف)** به صورت کلی در یک تابع یک‌به‌یک، به ازای هر مولفهٔ اول یک مولفهٔ دوم جداگانه داریم، یعنی هیچ‌کدام از مولفه‌های دوم تابع (برد تابع) عضو تکراری ندارند. **ب)** همسایگی محذوف: اگر در یک همسایگی برای عدد m، خود این عدد را حذف کنیم، به بازه تشکیل شده یعنی، $(a,b)-\{m\}$ یک همسایگی محذوف m می‌گوییم. **پ)** قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول $x=a$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد، و $f'(a)$ وجود داشته باشد آنگاه $f'(a)=0$ است. به بیان دیگر، هر نقطه اکسترمم نسبی تابع f، یک نقطه بحرانی هم هست؛ عکس این قضیه اما نادرست است چرا که هر نقطه بحرانی لزوماً نمی تواند یکی از اکسترمم‌های آن باشد. **پشتوانهٔ طلایی** *ریاضی دوازدهم؛ فصل ۱، صفحه ۲۵ و فصل ۳، صفحه ۵۳ و فصل ۵، صفحه ۱۰۶*	۰/۷۵

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲

جواب طلایی

الف) استوانه (۰/۲۵)

ب) $3x^2$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

الف) شکلی که از دوران یک مستطیل به حول طول یا عرض آن به وجود می‌آید، استوانه است.

ب) $f(x)=\frac{x^4}{4} \rightarrow f'(x)=(4)(\frac{x^3}{4})=x^3 \rightarrow f''(x)=3x^2$

فراتر از سوال

الف) بررسی شکل‌های حاصل از دوران:

استوانه: حاصل از دوران مستطیل به حول طول یا عرض آن

کره: حاصل از دوران یک دایره حول قطرهایش

مخروط: حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع

ب) فرمول بسیار مهم در مشتق‌گیری:

$$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۶، صفحه ۱۲۳ و فصل ۴، صفحه ۸۶

۰/۵

۳

جواب طلایی

الف) π (۰/۲۵)

ب) $\frac{4\pi}{3}$ (۰/۲۵)

۰/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

چرایی درخشان

الف)

$$\tan x = \tan ۳x \rightarrow x = k\pi + ۳x \rightarrow -۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

(چون k عضو $\mathbb{Z}$ است علامت منفی تفاوتی ندارد.)

➢ از جواب‌های گزینه‌ها، π می‌تواند جواب این معادله باشد. پس: $x = \frac{k\pi}{۲}$

ب)

$$۴\cos^۲ x - ۱ = ۰ \rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \rightarrow \cos x = \pm \frac{۱}{۲} \begin{cases} + \frac{\pi}{۳} \\ \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \rightarrow$$

➢ از بین جواب‌ها، مقدار $\frac{۴\pi}{۳}$ می‌تواند حاصل این معادله باشد.

فراتر از سوال

جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی را به شرط $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \alpha \\ (۲k+۱) - \alpha \end{cases} \\ \cos x = \cos x \rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha \\ \tan x = \tan x \rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۲، صفحه ۴۶

۴

جواب طلایی

$\text{gof} = \{(۵,-۵),(۳,۴),(۱۱,-۱)\}$ ← هر زوج مرتب (۰/۲۵)

چرایی درخشان

با توجه به توابع f و g، تابع gof از ما خواسته شده است، یعنی مقادیر ورودی از تابع f و مولفهٔ دوم آن از تابع g انتخاب می‌شود:

$$\begin{matrix} f=\{(۵,۱),(۳,۷),(-۱,۹),(۱۱,۲)\} \\ g=\{(۷,۴),(۲,-۱),(۳,۳),(۱,-۵)\} \end{matrix} \Rightarrow \text{gof} = \{\underbrace{(۵,-۵)}_{(۰/۲۵)}, \underbrace{(۳,۴)}_{(۰/۲۵)}, \underbrace{(۱۱,-۱)}_{(۰/۲۵)}\}$$

۰/۷۵

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

فراتر از سوال

طبق توضیح و متن کتاب درسی داریم:

مراحل ساخت تابع $g(f(x))=$

مرحله اول ← x ورودی و $f(x)$ خروجی است. (x باید در دامنه f باشد)

بعد از اینکه $f(x)$هایی که در دامنه g باید باشند را پیدا کردیم، مرحله دوم ← $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۱، صفحه ۱۲

۵

جواب طلایی

الف)

$f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2}$ (۰/۲۵)

$Df^{-1}=[-1,+\infty)$ (۰/۲۵)

ب)

$(fof^{-1})(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

۱/۲۵

الف) $f(x)=4x^2-1 \xrightarrow{x\geq 0 \text{ به شرط}} y=4x^2-1 \xrightarrow{(۰/۲۵)} y+1=4x^2 \rightarrow x^2=\frac{y+1}{4}$

$\Rightarrow \underbrace{x=\sqrt{\frac{y+1}{4}}=\frac{\sqrt{y+1}}{2}}_{(۰/۲۵)} \rightarrow \underbrace{f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2}}_{(۰/۲۵)}, D_{f^{-1}} \Rightarrow x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -1$

$\Rightarrow D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$ (۰/۲۵)

ب) $(fof^{-1})(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

فراتر از سوال

بررسی نکات مهم تابع وارون:

- هنگامی که تابع وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. (یا در آن بازه داده شده)
- نمودارهای تابع f با وارونش یعنی f^{-1}، قرینه یکدیگر هستند. (نسبت به خط $y = x$ قرینه شدند.)
- دامنه تابع f همان برد تابع f^{-1}، و برد f همان دامنه f^{-1} می‌باشد.
- ترکیب هر تابع با وارون خودش، x می‌شود. (البته $(fof^{-1})_{(x)} \neq (f^{-1}of)_{(x)}$ زیرا دامنه‌شان متفاوت است.)

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۱، صفحه ۲۴ و ۲۵

۶

جواب طلایی

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{3}$ (۰/۲۵) و ماکزیمم $\max = -3$ و مینیمم $\min = -7$

چرایی درخشان

در تابع $f(x) = 2\cos 3x - 5$ داریم

- مقدار ماکزیمم $= 2 + (-5) = -3$ (۰/۲۵)
- مقدار مینیمم $= (-2) + (-5) = -7$ (۰/۲۵)
- دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ (۰/۲۵)

۰/۷۵

فراتر از سوال

توابع مثلثاتی $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقادیر زیر هستند:

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و مینیمم $\min = -|a| + c$ ماکزیمم $\max = |a| + c$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۲، صفحه ۳۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷

جواب طلایی

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۰/۲۵) و $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \overbrace{1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}}^{(۰/۲۵)} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$

$\xrightarrow{\times 4} 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 64} \sin x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \times 4}$

$\sin x = \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{-12}{8}$ غ ق ق (۰/۲۵)

۱/۵

$\Rightarrow \underbrace{\sin x = \frac{1}{2}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} & (۰/۲۵) \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & (۰/۲۵) \end{cases}$

فراتر از سوال

در حل معادله مثلثاتی که می‌دانیم $\sin x = \sin\alpha$، جواب‌های کلی معادله برابر است با:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۲، صفحه ۴۵

۸

جواب طلایی

الف) $\frac{-3}{10}$ (۰/۲۵)

ب) $-\infty$ (۰/۲۵)

پ) -3 (۰/۲۵)

۱/۷۵

SanjeshCloud

چرایی درخشان

الف) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{x^{3}+1}{2x^{2}-6x-8}=\div\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{(x+1)(x^{2}-x+1)}{2(x+1)(x-4)}}_{(0/25)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{x^{2}-x+1}{2x-8}}_{(0/25)}=\underbrace{\dfrac{-3}{10}}_{(0/25)}$

ب) $\lim\limits_{x\to4^{+}}\dfrac{-3x+5}{x^{2}-16}=\underbrace{\lim\limits_{x\to4^{+}}\dfrac{-7}{0^{+}}}_{(0/25)}=-\infty$ (0/25)

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-9x^{3}+5x-4}{3x^{3}+2x^{2}-1}=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-9x^{3}}{3x^{3}}}_{(0/25)}=\dfrac{-9}{3}=-3$ (0/25)

فراتر از سوال

- هنگامی که حاصل حد $\dfrac{f}{g}$ برابر $\dfrac{0}{0}$ شود، به این معناست که هر دوی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیر هستند؛ پس عامل مشترک‌شان را ساده می‌کنیم و سپس حد را حساب می‌کنیم.
- طبق قضایای مد بی‌نهایت و حدهای نامتناهی در بی‌نهایت، به یاد داریم:

$$\begin{cases}\lim\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^{+}}=+\infty\\ \lim\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^{-}}=-\infty\end{cases},\quad \begin{cases}\lim\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^{+}}=-\infty\\ \lim\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^{-}}=+\infty\end{cases}$$

و در حد توابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\infty & f_{\text{درجه}}>g_{\text{درجه}}\\ 0 & f_{\text{درجه}}<g_{\text{درجه}}\\ \text{تقسیم ضرائب جمله ها} & f_{\text{درجه}}=g_{\text{درجه}}\\ \text{با درجه بزرگ‌تر} & \end{cases}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۳، صفحه ۵۲، ۵۶ و ۶۰

SanjeshCloud

۹

جواب طلایی

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱/۲۵

فراتر از سوال

اثبات‌هایی که از روابط و فرمول‌های مشتق داریم، به کمک مفهوم و تابع مشتق می‌توان حل کرد؛ این بخش و این مدل اثبات‌ها چند مثال دارد که در کتاب ذکر شده است.

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۴، صفحه ۸۶

۱۰

جواب طلایی

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است. (۰/۲۵)

چرایی درخشان

با بررسی اولیه، تابع در نقطه پیوسته است.

پس تابع f در نقطه مشتق‌پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)

۱/۲۵

فراتر از سوال

می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a از دامنه f، مشتق‌پذیر است. هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) در آن نقطه پیوسته باشد. ب) مشتق چپ و راست f در موجود، معین و برابر باشد؛

L یک عدد معین است

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۴، صفحه ۷۹ و ۸۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱

جواب طلایی

الف) $f(x)=\frac{x^۲-۱}{۳x+۴} \rightarrow f'(x)=\frac{\overbrace{(۲x)(۳x+۴)}^{(۰/۲۵)}-\overbrace{(x^۲-۱)(۳)}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{(۳x+۴)^۲}_{(۰/۲۵)}}=\frac{۳x^۲+۸x+۳}{(۳x+۱۴)^۲}$

ب) $g(x)=(۳x^۲-۱)(\sqrt{x}+۲) \rightarrow g'(x)=\underbrace{(۶x)(\sqrt{x}+۲)}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{(۳x^۲-۱)(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}_{(۰/۵)}$

فراتر از سوال

قوانین صفر در مشتق‌گیری را مرور کنیم:

$$*f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-۱} \xrightarrow{\text{کلی‌تر}} f(x)=(dx)^n \rightarrow f'(x)=(n)(d)(dx)^{n-۱}$$

$$*(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a) \quad , \quad (kf)'(a)=kf'(a) \quad ,$$

$$(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a) \quad , \quad (\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۴، صفحه ۸۶ و ۸۷

۱/۷۵

۱۲

جواب طلایی

آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[۰,۲]$ $=۴$ (۰/۲۵) و آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه $x=-۳$ $=-۱۲$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[۰,۲]$: $\underbrace{\frac{f(۲)-f(۰)}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{(۲(۲)^۲-۳)-(۰-۳)}{۲}=\frac{۵+۳}{۲}=۴$ (۰/۲۵)

آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه $x=-۳$: $f(x)=۲x^۲-۳ \rightarrow \underbrace{f'(x)=۴x}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{x=-۳} f'(-۳)=۴(-۳)=-۱۲$ (۰/۲۵)

۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

فراتر از سوال

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x=a$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

- به بیان دیگر، آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۴، صفحه ۹۴

۱۳

جواب طلایی

$$f(-\sqrt{\frac{8}{3}})^3=-(\sqrt{\frac{8}{3}})^3+8\sqrt{\frac{8}{3}}$$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

$$f(x)=x^3-8x\to \overbrace{f'(x)=3x^2-8=0}^{(۰/۲۵)}\to x^2=\frac{8}{3}\to x=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\simeq 1/6$$

$$f(-1)=(-1)^3-8(-1)=-1+8=7$$ (۰/۲۵)

$$f(2)=(2)^3-8(2)=-8$$ (۰/۲۵)

$$f(-\sqrt{\frac{8}{3}})=-(\sqrt{\frac{8}{3}})^3-8(-\sqrt{\frac{8}{3}})\simeq 8/8$$ (۰/۲۵)

$$f(\sqrt{\frac{8}{3}})=-(\sqrt{\frac{8}{3}})^3-8(\sqrt{\frac{8}{3}})<0$$ (۰/۲۵)

پس: $f(-\sqrt{\frac{8}{3}})>f(-1)\Rightarrow f(-\sqrt{\frac{8}{3}})$ ماکزیمم مطلق این تابع است. (۰/۲۵)

۱/۵

فراتر از سوال

در طی سوالاتی که مربوط به ماکزیمم (یا مینیمم) مطلق است؛

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا کرده، ۲) مقادیر تابع به ازای نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست می‌آوریم و مقایسه می‌کنیم؛ هر کدام بیشتر (کمتر) باشد، ماکزیمم (مینیمم) مطلق ماست. (به صورت خلاصه و به کمک تعاریفی که کتاب گفته بود، بیان شد)

SanjeshCloud

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۵، صفحه ۱۱۱

۱۴

جواب طلایی

$$x=\frac{۱۵-\sqrt{۶۳}}{۳}\simeq ۱/۱ \quad (۰/۲۵)$$

چرایی درخشان

طول قوطی موردنظر: $۹-۲x \to ۰\le x\le \frac{۹}{۲}$

عرض قوطی مدنظر: $۶-۲x \to ۰\le x\le ۳$

حالا حجم مکعب را می نویسیم $\to V(x)=\underbrace{(x)(۹-۲x)(۶-۲x)}_{(۰/۲۵)}=۴x^۳-۳۰x^۲+۵۴x \quad , \quad \overbrace{۰\le x\le ۳}^{(۰/۲۵)}$

یعنی اکسترمم مطلق در این بازه است

$$\Rightarrow V'(x)=۱۲x^۲-۶۰x+۵۴=۰\to ۶x^۲-۳۰x+۲۷=۰\to p=۲۵۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳۰\pm\sqrt{۲۵۲}\simeq ۱۵/۸}{۱۲}\simeq\begin{cases}x=۳/۸ & \text{غ ق ق}\\ x=۱/۱\end{cases}$$

در بازه $[۰,۳]$ نیست.

۱/۵

$x\simeq ۱/۱, x=۳, x=۰$ پس حالا نقاط بحرانی تابع هستند:

$$\begin{cases}V(۰)=۰ & \times\\ V(۳)=\overbrace{۴(۲۷)-۳۰(۹)+۵۴(۳)=۰}^{(۰/۲۵)} & \times\\ \Rightarrow x\ \frac{۳۰-\sqrt{۲۵۲}}{۱۲}\Rightarrow \underbrace{x=\frac{۱۵-\sqrt{۶۳}}{۳}}_{(۰/۲۵)}\simeq ۱/۱ & \text{طول ضلع مربع ماست}\\ \text{پس}\end{cases}$$

فراتر از سوال

در سوالات بهینه‌سازی، به دنبال مقدار ماکزیمم یا مینیمم هستیم. برای پیدا کردن آن از نقاط بحرانی یا گاهی تعیین علامت مشتق و ... استفاده می‌کنیم. در برخی مسائل هم با ۲ متغیر روبرو هستیم که باید همگی به یک متغیر تبدیل شوند و سوال را حل کنیم.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۵، صفحه ۱۱۵

۱۵

جواب طلایی

$e=\frac{۱}{۳}$ $(۰/۲۵)$, $F'(۱,-۴)$ $(۰/۲۵)$

چرایی درخشان

A و F و O هم طول هستند، یعنی بیضی قائم است:

فاصله کانونی $C=OF=۰-(-۲)=۲$ $(۰/۲۵)$ $\Rightarrow F'(۱,-۴)$ $(۰/۲۵)$

$\underbrace{۲a=AA'\Rightarrow \underbrace{a}_{\text{قطر بزرگ}}=OA=\underbrace{(۴-(-۲))}_{۶}=۶}_{(۰/۵)}$

خروج از مرکز: $\underbrace{e=\frac{c}{a}}_{(۰/۲۵)}\rightarrow \underbrace{e=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}}_{(۰/۲۵)}$

فراتر از سوال

۱/۵

یادآوری نکات بیضی:

- $OA=a$ قطر بزرگ
- $OB=b$ قطر کوچک
- $OF=c$ فاصله کانونی
- $a^۲=b^۲+c^۲$ رابطه بین پارامترهای بیضی
- $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز

- $A(+۱,۴)$ رأس اصلی
- $F(۱,۰)$ کانون بیضی
- $o(۱,-۲)$ مرکز بیضی
- F'
- A'

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم، فصل ۶، صفحه ۱۲۹ و ۱۳۱

SanjeshCloud

۱۶

جواب طلایی

$m=\frac{۱۳}{۲}$ (۰/۲۵) دایره‌ها $\rightarrow x^۲+y^۲-x+۳y-m=۰$

چرایی درخشان

طبق معادله گسترده دایره داریم:

$x^۲+y^۲+dx+by+c=۰$

شعاع دایره $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱)^۲+۳^۲+۴m}}_{(۰/۲۵)}=۳\Rightarrow \underbrace{\sqrt{۴m+۱۰}=۶}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{۴m+۱۰=۳۶}_{(۰/۲۵)}\rightarrow ۴m=۲۶\Rightarrow \underbrace{m=\frac{۲۶}{۴}=\frac{۱۳}{۴}}_{(۰/۲۵)}$$

۱/۲۵

فراتر از سوال

در حالتی که معادله گسترده دایره یعنی $x^۲+y^۲+dx+by+c=۰$ را می‌دهند، داریم:

$$*\begin{cases}\text{شعاع } R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\\ \text{مرکز دایره}: O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})\end{cases}$$

پشتوانهٔ طلایی

ریاضی دوازدهم؛ فصل ۶، صفحه ۱۳۷

۱۷

جواب طلایی

$P=\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵)

چرایی درخشان

با توجه به اینکه جنسیت هیچ فرزندی بر دیگری تأثیر ندارد، از پیشامد مستقل حل می‌شود؛

$$\underbrace{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}_{(۰/۵)}\Rightarrow \underbrace{P(\text{اولی دختر}\cap\text{آخری پسر})=P(\text{اولی دختر})\times P(\text{آخری پسر})}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۴}$$ (۰/۲۵)

۱/۲۵

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

	فراتر از سوال هنگامی که پیشامدهای یک مسئله تأثیری بر یکدیگر نداشته باشند، آن‌ها را مستقل می‌گویند و از فرمول آن یعنی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ استفاده می‌کنیم. **پشتوانهٔ طلایی** *ریاضی دوازدهم؛ فصل ۷، صفحه ۱۴۴*	
جمع	**«موفق باشید»**	**۲۰**

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اشتراک اِلیت کنکورسلام

تنها مسیر مطمئن تا قبولی فرهنگیان

معرفی خدمات اشتراک ELITE

گام ۱ : دفترچه تخصصی

- دوره F35 آموزش ویدیویی تمام دروس
- بانک سوال تستی درس به درس
- رفع اشکال آنلاین مشکلات درسی
- سه مرحله آزمون دفترچه تخصصی
- جزوه مرور سریع هک دفترچه تخصصی

گام ۲ : دفترچه فرهنگیان

- دوره B2 آموزش ویدیویی تعلیم و هوش
- کتاب آموزشی جامع تعلیم و هوش
- هشت مرحله آزمون دفترچه ویژه فرهنگیان
- کتاب نکته و تست تعلیم و هوش
- تدریس ویدیویی جمع‌بندی تعلیم و هوش

گام ۳ : امتحانات نهایی

- تدریس ویدیویی شب امتحانی
- جزوه مرور سریع هک نهایی
- آزمون مانور امتحان نهایی
- بانک سوال تشریحی درس به درس

گام ۴ : انتخاب رشته

- دفترچه معرفی رشته‌های فرهنگیان و رجایی
- کارگاه ویدیویی صفر تا صد انتخاب رشته
- تست رغبت سنج شغلی STRONG

گام ۵ : مصاحبه

- کتاب جامع آمادگی مصاحبه فرهنگیان
- کارگاه ویدیویی شبیه‌ساز گزینش
- کارگاه ویدیویی شبیه‌ساز بحث گروهی
- کارگاه ویدیویی شبیه‌ساز تمرین تحلیلی

پشتیبانی و همراهی تا خبر قبولی

- طراحی نقشه موفقیت شخصی
- سوختِ جت (پیامک انگیزشی روزانه)
- وبینار هفتگی جسارت معلم شدن
- رفع اشکال آنلاین برنامه‌ریزی شخصی
- لیگ رقابتی فعال دوره جمع‌بندی

با ضمانت‌نامه ۱۰۰٪ بازگشت وجه

Konkoorsalam.ir konkoorsalam farhangiyanir konkoorsalam konkoorslm

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir